מתמטיקה בדידה (5112)

תוכן העניינים

מתמטיקה בדידה (5112)

פרק 1 - תחשיב הפסוקים

תוכן העניינים

מתמטיקה בדידה (5112)

פרק 2 - לוגיקה

תוכן העניינים

לוגיקה

שאלות

1) רשמו את טבלאות האמת של הפסוקים הבאים:

א. $(p \wedge q) \vee \neg r$

ב. $\neg(p \wedge q) \to (\neg r)$

ג. $(p \wedge \neg q) \vee r$

ד. $(p \vee q) \to (q \to r)$

2) בטאו את שלילת הפסוקים הבאים (בלי קשר לנכונותם):

א. דוד יפה או ראובן מכוער.

ב. האוכל חם וטעים.

ג. לכל x קיים y, שהוא השורש הריבועי של x.

ד. כל תרנגולת כחולה עוזבת את הלול כדי להטיל ביצים.

ה. כל פנתר שהוא ורוד משחק בסרטים מצוירים.

ו. כל פנתר שהוא ורוד קוראים לו יוסי או שהוא משחק בסרטים מצוירים.

ז. כל פנתר שהוא ורוד קוראים לו יוסי וגם הוא משחק בסרטים מצוירים.

ח. לכל נגר קיים אדם שכל רהיטיו יוצרו בידי נגר זה.

ט. אם יהיה יום יפה וגם יהיה לי מצב רוח טוב אז אצא לטיול.

י. אם יהיה יום יפה אז אם יהיה לי מצב רוח טוב אז אצא לטיול.

3) בדקו אילו מזוגות הפסוקים הבאים שקולים לוגית. במקרה שהתשובה חיובית, הראו זאת הן בעזרת טבלת אמת והן בעזרת עץ שקר.

א. $\neg(p \to q)$ $p \wedge (\neg q)$

ב. $(\neg p) \to q$ $p \vee (\neg q)$

ג. $p \to (\neg q)$ $\neg(p \wedge q)$

ד. $(p \vee q) \wedge (\neg q)$ $p \wedge (\neg q)$

ה. $p \leftrightarrow q$ $(p \wedge q) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q))$

ו. $(s \to (p \wedge (\neg r))) \wedge ((p \to (r \vee q)) \wedge s)$ $p \vee u$

ז. הראו כי $\neg(r \wedge (p \vee q)) \equiv ((\neg p) \wedge (\neg q)) \vee \neg r$, בעזרת זהויות יסוד.

4) הביעו את הקשרים הבאים:

א. קשר הגרירה בעזרת קבוצת הקשרים $\{\wedge,\neg\}$.

ב. קשר ה- $\vee$ בעזרת קבוצת הקשרים $\{\wedge,\neg\}$.

ג. קשר ה- $\oplus$ (XOR) בעזרת קבוצת הקשרים $\{\wedge,\neg\}$.

ד. קשר ה- $\leftrightarrow$ בעזרת קבוצת הקשרים $\{\wedge,\neg\}$.

ה. קשר הגרירה בעזרת קבוצת הקשרים $\{\vee,\neg\}$.

ו. הקשר $\wedge$ בעזרת קבוצת הקשרים $\{\vee,\neg\}$.

ז. קשר ה- $\oplus$ (XOR) בעזרת קבוצת הקשרים $\{\vee,\neg\}$.

ח. קשר ה- $\leftrightarrow$ בעזרת קבוצת הקשרים $\{\vee,\neg\}$.

ט. הוכיחו כי הקבוצה $\{\downarrow\}$ היא קבוצת קשרים שלמה.

י. נתון f קשר טרינארי המוגדר כך: $f(x,y,z)=x\to\neg(y\to z)$.
הוכיחו כי $\{f\}$ היא קבוצת קשרים שלמה.

יא. הביעו את הקשר $f(x,y,z)=x\to\neg(y\to z)$ באמצעות $\downarrow$ בלבד.

יב. הביעו את הקשר $\downarrow$ באמצעות $f(x,y,z)=x\to\neg(y\to z)$ בלבד.

בסעיפים הבאים רשמו צורה דיסיונקטיבית-נורמלית (DNF) וצורה קוניונקטיבית-נורמלית (CNF) של הפסוקים:

יג. $p\to q$

יד. $(p\vee q)\wedge\neg r$

טו. $(p\to q)\to(r\to\neg q)$

5) יהיו $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta$ הפסוקים:

$$\alpha_1:(A\vee B)\to(D\to C)$$
$$\alpha_2:B\to\neg(C\wedge A)$$
$$\alpha_3:C\leftrightarrow(A\wedge D)$$
$$\beta:D\vee(B\wedge C)$$

בדקו אלו מהטענות הבאות נכונות והוכיחו:

א. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\Rightarrow\beta$

ב. β אינה נובעת טאוטולוגית מהפסוקים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, אך מתיישבת אתם.

ג. β אינה מתיישבת עם הפסוקים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, כלומר סותרת אתם.

6) הוכיחו כי הפסוקים הבאים הינם טאוטולוגיות, ללא שימוש בטבלת אמת:

א. $p\vee(\neg p)$

ב. $p\vee(p\to q)$

ג. $(p\to q)\vee(q\to r)$

ד. $(p\wedge(p\to q))\to q$

ה. $((p\to q)\wedge(q\to r))\to(p\to r)$

ו. $((p\to r)\wedge(q\to r))\to((p\vee q)\to r)$

ז. $(q\vee p\vee r)\to((\neg p)\to((q\vee r)\wedge(\neg p)))$

ח. $((B\to(C\wedge(\sim A)))\wedge(((\sim B)\vee C)\to D)\wedge(E\to(\sim D)))\to(A\to\sim E)$

ט. הוכיחו בעזרת טבלת אמת ש- $(u\to v)\leftrightarrow((\neg v)\to(\neg u))$ טאוטולוגיה.

י. הוכיחו כי הפסוק הבא הוא טאוטולוגיה (מותר להסתמך על סעיף ט):

$$((u\to v)\leftrightarrow((\neg v)\to(\neg u)))\to(((p\to r)\wedge((\neg q)\to p)\wedge(\neg r))\to q)$$

7) בארץ חלם מתקיימת שביתת רופאים במטרה להגדיל את תקציב הבריאות.
להלן ניתוח המצב:

* אם הרופאים לא יסיימו את השביתה אז הנהלות בתי החולים יתערבו.
* אם לא תיפגע בריאותם של החולים אז הממשלה לא תגדיל את הקציב.
* אם הנהלות בתי החולים יתערבו אז לא תפגע בריאותם של החולים או שבית המשפט יתערב.
* בית המשפט לא יתערב וגם הממשלה לא תגדיל את התקציב.

מסקנה: הרופאים יסיימו את השביתה.

נסמן: D – הרופאים יסיימו את השביתה, H – הנהלות בתי החולים יתערבו, P – בית המשפט יתערב, C – לא תפגע בריאותם של החולים, M – הממשלה תגדיל את התקציב.

א. הצרינו את הטיעון לשפת תחשיב הפסוקים בעזרת המשתנים המוצעים.

ב. בדקו, ללא שימוש בטבלת אמת, אם הטיעון תקף.

8) בארץ חלם מתקיימות בחירות.
זרובבל, כתבנו לענייני מפלגות, מנתח את המצב:
* אם אבי ייבחר לראשות מפלגת נתיב את דני יפרוש.
* אם שמעון יציע לדני תפקיד אז דני יפרוש.
* אם בני ייבחר לראשות מפלגת פיתה אז שמעון יציע לדני תפקיד או שאבי ייבחר לראשות מפלגת נתיב.
* בני יבחר לראשות מפלגת פיתה.

לכן, כתבנו מסיק שדני יפרוש.
נסמן: A – אבי ייבחר לראשות מפלגת נתיב, B – בני יבחר לראשות מפלגת פיתה, C – שמעון יציע לדני תפקיד, D – דני יפרוש.
הצרינו את הטענה לשפת תחשיב הפסוקים והוכיחו כי המסקנה תקפה.

9) בפרס העתיקה מחליט היזם וייזתא לבנות תיאטרון.
אם נרצה שהתיאטרון נגיש לתושבים אז נצטרך להקימו בלב העיר.
אם נרצה שהתיאטרון יהיה רווחי, אז הוא יצטרך להיות גדול ומרווח כדי שיכיל הרבה אנשים. אבל אם התיאטרון יהיה גדול ומרווח ויבנה בלב העיר, אז הוא יעלה 10 מיליון זוזים פרסיים.
אבל לוייזתא היזם אין 10 מיליון זוזים פרסיים.
לכן, וייזתא היזם מסיק כי התיאטרון יוקם במקום לא נגיש לתושבים או שלא יהיה גדול ומרווח.

א. תרגמו את ניתוח המצב לשפת הפסוקים, תוך שימוש בסימונים הבאים:
N – נגיש לתושבים, L – בלב העיר, Y – יכיל הרבה אנשים,
G גדול ומרווח, M – מחירו יעלה על..., R – רווחי.

ב. הצרינו את ההנחות והמסקנה לשפת הפסוקים ובדקו האם המסקנה תקפה, ללא שימוש בטבלת אמת.

10) הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות (כאשר p,q,r פסוקים אטומים):

א. $(p\vee q)\Rightarrow p$

ב. $(p\vee q)\Rightarrow q$

ג. $(p\to q)\Rightarrow q$

ד. $p, p\to q\Rightarrow q$

ה. $(p\to q)\wedge(p\to r)\wedge p\Rightarrow r$

ו. $r\Rightarrow(p\to q)\wedge(p\to r)\wedge p$

ז. $A\to B, C\to B, D\to(A\vee C), D\Rightarrow B$

ח. $(A\vee B\to D), D\to(C\vee P), P\to Q, (\neg C)\wedge(\neg Q)\Rightarrow\neg A$

ט. $(B\to(C\wedge(\sim A)))\ ,\ (((\sim B)\vee C)\to D)\ ,\ (E\to(\sim D))\models(A\to\sim E)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

11) נתון כי α,β,γ פסוקים לאו דווקא אטומים.
הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם α סתירה וגם $\alpha \Rightarrow \beta \vee \gamma$, אז $\beta \Rightarrow \neg\gamma$.

ב. אם α טאוטולוגיה וגם $\alpha \Rightarrow \beta \vee \gamma$, אז $\neg\beta \Rightarrow \gamma$.

ג. אם $\alpha \Rightarrow \beta \vee \gamma$, אז $((\alpha \Rightarrow \beta) \vee (\alpha \Rightarrow \gamma))$.

ד. אם $((\alpha \Rightarrow \beta) \vee (\alpha \Rightarrow \gamma))$, אז $\alpha \Rightarrow \beta \vee \gamma$.

ה. אם $\alpha \Rightarrow \beta \wedge \gamma$, אז $((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\alpha \Rightarrow \gamma))$.

ו. אם $((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\alpha \Rightarrow \gamma))$, אז $\alpha \Rightarrow \beta \wedge \gamma$.

ז. אם $\alpha \Rightarrow (\beta \to \gamma)$, אז $(\alpha \to \beta) \Rightarrow \gamma$.

ח. אם $(\alpha \to \beta) \Rightarrow \gamma$, אז $\alpha \Rightarrow (\beta \to \gamma)$.

ט. אם $\alpha \vee \beta \Rightarrow \gamma$, אז $(\alpha \Rightarrow \gamma) \vee (\beta \Rightarrow \gamma)$.

י. אם $(\alpha \Rightarrow \gamma) \vee (\beta \Rightarrow \gamma)$, אז $\alpha \vee \beta \Rightarrow \gamma$.

יא. אם $\alpha \models \beta \to \gamma$, אז $\alpha, \beta \models \gamma$.

יב. אם $\alpha \models \beta \to \gamma$, אז $\alpha \vee \beta \models \gamma$.

12) עבור α, פסוק אטומי או מורכב, נגדיר את הקבוצה $F_\alpha = \{\gamma \mid \alpha \Rightarrow \gamma\}$.
כלומר, F_α היא קבוצת כל הפסוקים שנובעים טאוטולוגית מהפסוק α.
הוכיחו כי $\alpha \equiv \beta$ אם ורק אם $F_\alpha = F_\beta$.

13) לכל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה ורשמו את שלילתה ללא שימוש בקשר השלילה. במקרה שהטענה נכונה נמקו זאת, ובמקרה שהטענה אינה נכונה הביאו דוגמה נגדית.

א. $\forall x \in \mathbb{N} (\exists y \in \mathbb{N} (x < y))$

ב. $\forall x \in \mathbb{N} (\exists y \in \mathbb{N} (x > y))$

ג. $\forall x, y \in \mathbb{R} (x > y) \to \exists z \in \mathbb{R} (x > y + z)$

ד. $\forall x \in \mathbb{R} (x > 0) \to (\exists n \in \mathbb{N} (x > \tfrac{1}{n}))$

ה. $\forall x \in \mathbb{R} (x \neq 0 \to \forall y \in \mathbb{Z} \exists z \in \mathbb{R} (xz = y))$

ו. $\forall x \in \mathbb{N} (x \geq 1 \to \forall y \in \mathbb{N} \exists z \in \mathbb{N} (xz = y))$

ז. $\forall x \in \mathbb{R} (x > 0 \to \exists y \in \mathbb{N} (xy > 1))$

ח. $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} (xy = x \wedge x + y < 5) \to y < 4\tfrac{1}{2}$

ט. $\forall x \in \mathbb{R} ((x > 0) \to \forall y \in \mathbb{R} (\exists n \in \mathbb{N} (nx > y)))$

14) הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות, ורשמו את השלילה של כל טענה, כאשר הקשר $\neg$ מופיע רק לצד פרדיקטים. במקרה של הפרכה הדגימו עולם דיון מתאים עבורו הטענה לא מתקיימת, והסבירו מדוע הטענה לא מתקיימת.

א. $\forall x P(x) \to \exists x\ P(x)$

ב. $\exists x P(x) \to \forall x\ P(x)$

ג. $\left(\forall x\left(P(x)\wedge Q(x)\right)\right)\to\left(\forall x P(x)\wedge\forall x Q(x)\right)$

ד. $\left(\forall x P(x)\wedge\forall x Q(x)\right)\to\left(\forall x\left(P(x)\wedge Q(x)\right)\right)$

ה. $\left(\forall x\left(P(x)\vee Q(x)\right)\right)\to\left(\forall x P(x)\vee\forall x Q(x)\right)$

ו. $\left(\forall x P(x)\vee\forall x Q(x)\right)\to\left(\forall x\left(P(x)\vee Q(x)\right)\right)$

ז. $\left(\exists x\left(P(x)\wedge Q(x)\right)\right)\to\left(\exists x P(x)\wedge\exists x Q(x)\right)$

ח. $\left(\exists x P(x)\wedge\exists x Q(x)\right)\to\left(\exists x\left(P(x)\wedge Q(x)\right)\right)$

ט. $\left(\exists x\left(P(x)\vee Q(x)\right)\right)\to\left(\exists x P(x)\vee\exists x Q(x)\right)$

י. $\left(\exists x P(x)\vee\exists x Q(x)\right)\to\left(\exists x\left(P(x)\vee Q(x)\right)\right)$

15) בעולם הדיון $\mathbb{Z}$, נסמן

$P(x): x^2-8x+15=0$

$Q(x): x\ is\ odd$

$R(x): x>0$.

$L(x): x^2+2x+2=0$

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. $\forall x\left[P(x)\to Q(x)\right]$

ב. $\forall x\left[Q(x)\to P(x)\right]$

ג. $\exists x\left[P(x)\to Q(x)\right]$

ד. $\exists x\left[Q(x)\to P(x)\right]$

ה. $\forall x\left[L(x)\to Q(x)\right]$

ו. $\exists x\left[L(x)\to Q(x)\right]$

ז. $\exists x\left[R(x)\to P(x)\right]$

ח. $\forall x\left(\neg Q(x)\to\neg P(x)\right)$

ט. $\forall x\left[\left(P(x)\vee Q(x)\right)\to R(x)\right]$

י. $\exists x\left[P(x)\to\left(Q(x)\wedge R(x)\right)\right]$

יא. $\forall x\left[P(x)\to\left(Q(x)\wedge R(x)\right)\right]$

נפנה עתה למספר שאלות בהצרנות. מותר להשתמש בסימני המשתנים x,y,z ,
סימני הקבוצה $A,B,C,\cdots,\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R}$, סוגריים, קשרים, כמתים, הפרדיקטים
$(,),\subseteq,\in,=,\neq,\exists,\forall,\vee,\wedge,\rightarrow,\leftrightarrow,<,>$, וכן סימנים נוספים הנתונים בגוף השאלה.

שימו לב: <u>אסור להשתמש בקשר השלילה</u> ואין להשתמש בסימן $\notin$.

16) הצרינו כל אחת מהטענות הבאות:

א. לכל מספר ממשי אין עוקב מידי (כלומר, שאין מספר ראשון מיד אחריו).

ב. אין קבוצה שמכילה את כל הקבוצות (מותר להשתמש בסימן $\notin$).

ג. לכל מספר שאינו ראשוני יש לפחות שני מחלקים שונים.
(מותר להשתמש ב- P עבור קבוצת המספרים הראשוניים וב- $\notin$)

ד. למספר הטבעי הכי גדול אין מחלקים (ברור שאין, אבל צריך להצרין).

ה. לא כל מספר טבעי הוא ראשוני.

ו. כל קבוצה אינה שקולה לקבוצת החזקה שלה.

ז. לכל שני מספרים טבעיים שונים יש מחלק משותף.

ח. בכל קבוצה בת לפחות שלושה איברים שונים אין איבר מקסימלי.

ט. לא בכל תת קבוצה של ממשיים יש איבר מינימלי.

י. תהי פונקציה $f:X\rightarrow Y$.
נגדיר את הפונקציה $G:P(X)\rightarrow P(Y)$ כך: $G(B)=\{x\in X \mid f(x)\in B\}$.
הצרינו את הטענה: אם f על אז G ח.ח.ע.
השתמשו רק בסימנים הבאים:
סימני המשתנים x,y,B,C , סימני הקבוצות X,Y , סימן הפונקציה f ,
סוגריים, קשרים, כמתים ופרדיקטים.
שימו לב: <u>אסור להשתמש</u> בסימנים G ו- P . יש להשתמש בהגדרותיהם כדי להחליפם בסימנים אחרים.

יא. לכל מספר ממשי יש לכל היותר שני מספרים ממשיים שונים זה מזה שריבועם שווה לו.

יב. הצרינו את הטענה: לכל פונקציה $f:A\rightarrow B$ ולכל פונקציה $g:B\rightarrow A$,
אם $g\circ f=Id_A$, אז f היא על.
מותר להשתמש בסימנים הבאים ורק בהם: סימני המשתנים $x_1,x_2,\cdots$,
קשרים $\vee,\wedge,\leftrightarrow,\rightarrow$, והסימנים f,g , A^B,B^A , $\in,(,),\forall,\exists$.
למען הסר ספק: אסור להשתמש ב- d_A וב- $\circ$.

יג. מספר ראשוני הוא מספר טבעי גדול מאחד שמחלקיו היחידים הם הוא עצמו ו-1. הצרינו את הטענה הבאה:
לכל מספר טבעי, בתחום שבין המספר עצמו לפעמיים המספר (כולל קצוות) יש לפחות מספר ראשוני אחד.
מותר להשתמש אך ורק בסימנים הבאים: סימני המשתנים $x_1, x_2, \cdots$,
הקשרים $\vee, \wedge, \leftrightarrow, \leftrightarrow$ והסימנים $|, =, \cdots, 1, 2, 3, \leq, \mathbb{N}, \in, (,), \forall, \exists$.
הסימן | פירושו מחלק.

יד. הצרינו את הטענה הבאה: בקבוצה A יש לכל היותר שני מספרים טבעיים.
השתמשו רק בסימנים הבאים: סימני המשתנים x, y, z, סימני הקבוצות $\mathbb{N}$, A וכן סוגריים, קשרים, כמתים, ופרדיקטים.

טו. הצרינו את הטענה: לא תמיד נכון שאם $A \subseteq B$ אז $A \sim B$.
מותר להשתמש רק בסימנים הבאים: סימני הקבוצות A, B (מותר לצרף אותם לקבוצה בחזקת קבוצה), סוגריים, קשרים, כמתים, ופרדיקטים.
אין להשתמש בקשר השלילה.

טז. הצרינו את הטענה הבאה: קבוצת הפונקציות החח״ע מהממשיים לטבעיים אינה ריקה.
השתמשו רק בסימנים הבאים: סימני המשתנים x, y, סימני הקבוצות $\mathbb{R}, \mathbb{N}$ (וצירופי חזקות שלהן), סימני הפונקציות f, g, סוגריים, קשרים, וכמתים: $=, \neq, \in, \{,\}, (,), \leftrightarrow, \rightarrow, \vee, \wedge, \forall, \exists$.

יז. הצרינו את כלל הכפל של אי-שוויון ממשי (קטן או שווה) במספר ממשי שונה מאפס.
מותר להשתמש אך ורק בסימנים הבאים: סימני המשתנים $x_1, x_2, \cdots$,
הקשרים $\vee, \wedge, \leftrightarrow, \leftrightarrow$ והסימנים $0, \leq, \mathbb{R}, \in, (,), \forall$.
דוגמה לכלל הזה היא: מאי השוויון $3.14 \leq \pi$ (על ידי כפל במינוס חצי) לקבל את אי השוויון $-0.5\pi \leq -1.57$.

17) נתונה הקבוצה $\{x \in \mathbb{R} | \forall y [(y \in \{t \in \mathbb{N} | t > 3\} \rightarrow (y > x))]\}$.
כתבו אותה בצורה $\{x \in \mathbb{R} | .....\}$, כך שבאגף ימין לא יופיע אף משתנה חוץ מ- x.

18) תארו במדויק את הקבוצה:
$$A = \{x \in \mathbb{R} | \exists y \in \mathbb{N} \ (x = y^2) \rightarrow (x > 2)\} - \{x \in \mathbb{R} | |x| > 1\}.$$

19) הוכיחו כי ההנחה A גוררת טאוטולוגית את המסקנה $\neg(\neg A)$,
בעזרת כללי ההיסק הבאים:

1. $\Rightarrow p \to p$
2. $p \Rightarrow q \to p$
3. $p \to q\ ,\ p \to (\neg q) \Rightarrow \neg p$

20) הוכיחו שההנחות הבאות גוררות טאוטולוגית את המסקנה A

$B \vee D$
$C \to B$
$D \to (A \vee C)$
$\neg B$

מותר להשתמש רק בכללי ההיסק הבאים:

$P \Rightarrow Q \vee P$
$P \wedge Q \Rightarrow P$
$P \wedge Q \Rightarrow Q$
$P \to Q, Q \to R \Rightarrow P \to R$
$P, P \to Q \Rightarrow Q$
$\neg P, P \vee Q \Rightarrow Q$
$P \Rightarrow \neg\neg P$
$P \to Q \Rightarrow \neg Q \to \neg P$

21) הוכיחו:

א. אם $m,n \in \mathbb{Z}$ מספרים עוקבים, אז $m+n$ אי-זוגי.
ב. אם $m,n \in \mathbb{Z}$ מספרים עוקבים, אז mn זוגי.
ג. אם $m,n \in \mathbb{Z}$ מספרים אי-זוגיים, אז $m+n$ זוגי.
ד. אם $n \in \mathbb{N}$ אי-זוגי, אז קיימים $m,k \in \mathbb{N}$, כך ש- $m^2 - k^2 = n$.
רמז: חפשו $m,k \in \mathbb{N}$ עוקבים.
ה. אם $a,b,c \in \mathbb{N}$ וגם $a \mid b$ וגם $a \mid c$, אז $a \mid b+c$.

22) הוכיחו:

א. קיימים אינסוף מספרים ראשוניים (נסו בצורה ישירה ועל דרך השלילה).

ב. קיימים $x,y\notin\mathbb{Q}$, כך ש- $x^y\in\mathbb{Q}$.

ג. יש אינסוף שלשות פיתגוריות.
כלומר, יש אינסוף פתרונות בשלמים למשוואה $x^2+y^2=z^2$.

ד. לכל $n\in\mathbb{N}$ קיים רצף של n מספרים טבעיים עוקבים, שאף אחד מהם אינו ראשוני.

23) הוכיחו בדרך השלילה:

א. שלא קיים טבעי הכי גדול.

ב. שלכל מספר טבעי קיים מספר טבעי גדול ממנו.

ג. $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

ד. שלא קיימים $p,t\in\mathbb{Q}$, כך ש- $p-t\notin\mathbb{Q}$.

ה. שלא קיימים $p\in\mathbb{Q},\ r\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, כך ש- $p+r\in\mathbb{Q}$.

ו. שלא קיים $q\in\{x\mid 0<x\in\mathbb{Q}\}$, כך ש- $q=\min\{x\mid 0<x\in\mathbb{Q}\}$.

ז. שלכל $q\in\{x\mid 0<x\in\mathbb{Q}\}$ מתקיים $q\neq\min\{x\mid 0<x\in\mathbb{Q}\}$.

24) הוכיחו בקונטרה-פוזיציה:

א. אם $n\in\mathbb{N}$, כך ש- n^2 זוגי, אז n זוגי.

ב. אם $m,n\in\mathbb{Z}$ מספרים, כך ש- m זוגי, אז n זוגי או m זוגי.

ג. אם $m,n\in\mathbb{Z}$ מספרים, כך ש- m אי-זוגי, אז n אי-זוגי וגם m אי-זוגי.

ד. אם $x,y\in\mathbb{R}$, כך ש- $x+y$ אי-רציונלי, אז לפחות אחד מהמספרים x,y הו אי-רציונלי.

ה. אם A,B קבוצות ו- x איבר, כך שמתקיים $x\notin A\cap B$, אז $x\notin A$ או $x\notin B$.

ו. אם A,B קבוצות ו- x איבר, כך שמתקיים $x\notin A\cup B$, אז $x\notin A$ וגם $x\notin B$.

ז. אם A,B קבוצות ו- x איבר, כך שמתקיים $x\notin A$, אז $x\notin A\cap B$.

ח. אם $A-(B-C)\subseteq(A-B)-C$, אז $A\cap C=\varnothing$.

ט. אם $(A\cup B)-C\subseteq A-B$, אז $A(-C)\cap B=\varnothing$.

י. אם $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$, אז $(A\subseteq B)\vee(B\subseteq A)$.

25) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו, תוך הפרדה למקרים, שאם $z \in \mathbb{Z}$, כך ש- z לא מתחלק ב- 3, אז $z^2 = 1 \bmod(3)$.

ב. הוכיחו או הפריכו:
אם $z \in \mathbb{Z}$, כך ש- z לא מתחלק ב- 4, אז z^2 לא מתחלק ב- 4.

26) הוכיחו בדרך השלילה:

א. אם $n \in \mathbb{N}$, כך ש- $n \bmod(3) = 2$, אז n הוא לא ריבוע של אף מספר טבעי.

ב. אם $(A-C)\cup(C-B) \subseteq A\cap B$, אז $A \subseteq B$.

ג. אם $(C-A)\cup(B-C) \subseteq A-B$, אז $B \subseteq A$.

מתמטיקה בדידה (5112)

פרק 3 - תורת הקבוצות

תוכן העניינים

מבוא לתורת הקבוצות

שאלות

1) לגבי כל אחד והממדים הבאים רשמו ב-□ את הסימן המתאים, $\not\subseteq,\subset,\subseteq,\notin,\in$.
שימו לב שתיתכן יותר מתשובה אחת. אם התשובה היא $\not\subseteq$, נמקו.

א. $1\square\{1,\{1\}\}$
ב. $\{1\}\square\{1,\{1\}\}$
ג. $\{8,\varnothing\}\ \square\ \{1,2,8\}$
ד. $\varnothing\ \square\ \{1,2\}$
ה. $\varnothing\ \square\ \{\varnothing,1,2\}$
ו. $\{2\}\square\{\{1,\{2\}\}\}$
ז. $\{2\}\ \square\ \{2,\{2,\{2\}\}\}$
ח. $\{2\}\ \square\ \{2,\{2\},\{\{2\}\}\}$
ט. $\{2\}\ \square\ \{2,\{2,\{2\}\},\{2\}\}$
י. $\{\{2\},\varnothing\}\ \square\ \{2,\{2\},\{\{2\}\}\}$
יא. $\varnothing\ \square\ \{1,\{\varnothing\}\}$
יב. $\{\varnothing\}\ \square\ \{1,\{\varnothing\}\}$
יג. $\{1,2\}\ \square\ \{1,\{2\}\}$
יד. $1\ \square\ \mathbb{N}$
טו. $\{1\}\ \square\ \mathbb{N}$
טז. $1\ \square\ \{\mathbb{N}\}$
יז. $\{1\}\ \square\ \{\mathbb{N}\}$

תשובות סופיות

1) א. $\in$ ב. $\subset,\subseteq,\in$ ג. $\not\subseteq,\notin$ ד. $\subset,\subseteq,\notin$ ה. $\subset,\subseteq,\in$
ו. $\not\subseteq,\notin$ ז. $\subset,\subseteq,\notin$ ח. $\subset,\subseteq,\in$ ט. $\subset,\subseteq,\in$ י. $\not\subseteq,\notin$
יא. $\subset,\subseteq,\notin$ יב. $\not\subseteq,\in$ יג. $\not\subseteq,\notin$ יד. $\notin,\in$ טו. $\subset,\subseteq,\notin$
טז. $\notin$ יז. $\not\subseteq,\notin$

פעולות על קבוצות

שאלות

1) עבור $A=\{1,2,3\}, B=\{3,4,5\}, C=\{1,4,6\}$, חשבו את הקבוצות הבאות:

א. $(A\cup C)\setminus B$

ב. $(A\cap B)\cup C$

ג. $A\cap(B\cup C)$

ד. $P(A)$

ה. $C\setminus A$

2) עבור $A=\{1,2,3\}, B=\{3,4,5\}, C=\{1,4,6\}$:

א. האם $B\subseteq C$?

ב. האם $\{1\}\subseteq B$?

ג. האם $\{1\}\subseteq A$?

ד. האם $\{1\}\in P(A)$?

ה. האם $\{1\}\subseteq P(A)$?

ו. האם $\{\{1\}\}\subseteq P(A)$?

ז. האם $\{\{1\},\varnothing\}\subseteq P(A)$?

3) עבור $B=\{4,\varnothing\}$, $A=\{1,\{3,*\},\varnothing\}$, חשבו:

א. $A\cup B$

ב. $A\cap B$

ג. $A-B$

ד. $B-A$

ה. $A\oplus B$

תשובות סופיות

1) א. $\{1,2,6\}$ ב. $\{1,3,4,6\}$ ג. $\{1,3\}$ ד. $2\notin P(A)$

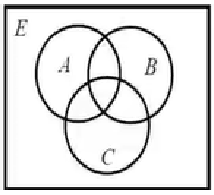
2) א. לא. ב. לא. ג. כן. ד. כן.
ה. לא. ו. כן. ז. כן.

3) א. $\{1,\{3,*\},\varnothing,4\}$ ב. $\{\varnothing\}$ ג. $\{1,\{3,*\}\}$ ד. $\{4\}$
ה. $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$

דיאגרמת ון

שאלות

1) באיור שלהלן דיאגרמת ון.



קווקוו את השטח המתאר את הקבוצות הבאות:

א. $(A-B)-C$

ב. $A-(B-C)$

ג. $A\cap B^c$

ד. $(A\cap B^c)\cup(C\cap A^c)$

ה. $(A\cap B)\cap C$

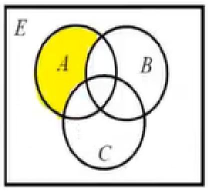
ו. $A\cap(B\cap C)$

ז. $(A\cup B)\cup C$

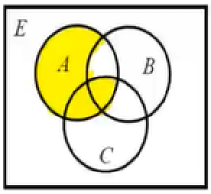
ח. $A\cup(B\cup C)$

תשובות סופיות

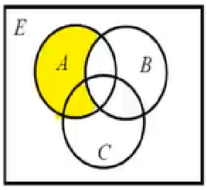
1) א.



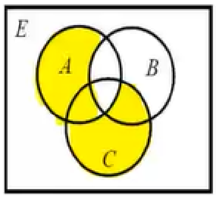
ב.



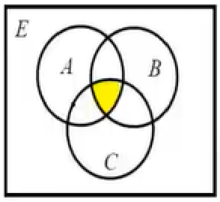
ג.



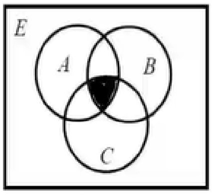
ד.



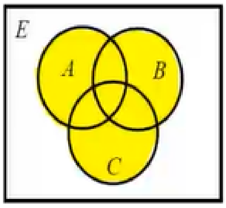
ה.



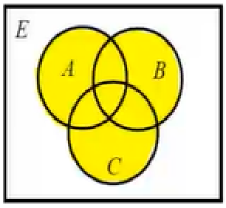
ו.



ז.



ח.



קריאת קבוצות

שאלות

1) עבור $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$, רשמו בשתי דרכים את הקבוצות הבאות:

א. קבוצת המספרים טבעיים האי זוגיים, $\mathbb{N}_{odd}=\{1,3,5,...\}$.

ב. קבוצת כל הטבעיים שיש להם שורש ריבועי, $A=\{1,4,9,16,25,36,49,...\}$.

ג. קבוצת כל הטבעיים שאין להם שורש ריבועי,
$B=\{2,3,5,6,7,8,10,11,12,13,14,15,17,18,...\}$.

ד. קבוצת כל השורשים של מספרים טבעיים,
$C=\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5},\sqrt{6},\sqrt{7},...\}$.

ה. קבוצת כל החזקות של 2,
$D=\{2^1,2^2,2^3,...\}=\{2,4,8,16,32,...\}$.

2) עבור $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$, חשבו את הקבוצות הבאות:

א. $C=\{3n-1 | n\in\mathbb{N}\}$

ב. $K=\{x\in\mathbb{Z} \,|\, |x|\ge 2\rightarrow x^2>41\}$

ג. $C=\{x\in\mathbb{Z} \,|\, |x|\ge 7\rightarrow x<20\}$

ד. $C=\{3n-1 | n\in\mathbb{N}\wedge\sqrt{n}\in\mathbb{N}\}=\{3n-1 | \sqrt{n}\in\mathbb{N}\}$

ה. $C=\{x\in\mathbb{Z} | x\ge 8\rightarrow x^2<67\}$

תשובות סופיות

1) א. דרך 1: $\left\{n\in\mathbb{N}\left|\frac{n+1}{2}\in\mathbb{N}\right.\right\}$, דרך 2: $\{2n-1|n\in\mathbb{N}\}$.

ב. דרך 1: $\{n\in\mathbb{N}|\sqrt{n}\in\mathbb{N}\}$, דרך 2: $\{n^2|n\in\mathbb{N}\}$.

ג. דרך 1: $\{n\in\mathbb{N}|\sqrt{n}\notin\mathbb{N}\}$, דרך 2: $\{n|n\in\mathbb{N}\wedge\forall k\in\mathbb{N}\ n\neq k^2\}$.

ד. דרך 2: $\{\sqrt{n}|n\in\mathbb{N}\}$.

ה. דרך 1: $\{n\in\mathbb{N}|\exists k\in\mathbb{N}\ n=2^k\}$, דרך 2: $\{2^n|n\in\mathbb{N}\}$.

2) א. $C=\{2,5,8,11,14,17,20,...\}$

ב. $\mathbb{Z}-\{\pm2,\pm3,\pm4,\pm5,\pm6,...\}$

ג. $\mathbb{Z}-\{20,21,22,23,...\}$

ד. $\{2,11,26,74,107,146,...\}$

ה. $\mathbb{Z}-\{9,10,11,12,...\}$

שאלות הוכחה

שאלות

בכל אחת משאלות הפרק יש לפעול כפי שמתואר בשאלה 1.

1) תהיינה A,B קבוצות.
אם הטענה נכונה, ציינו זאת ותנו נימוק קצר מדוע.
אם הטענה אינה נכונה, ציינו זאת, ותנו דוגמה נגדית.
יש ערך רב יותר לדוגמה מינימלית; בדקו האם בדוגמה הנגדית יש פרטים מיותרים והסירו אותם.
אם טענות יב-כא נכונות, נסו להוכיחן, ובמיוחד את טענה יב, שבה נשתמש יותר מאוחר להוכחת תכונות של קבוצת חזקה.

א. אם $x\notin A$, אז $x\notin A\cup B$.
ב. אם $x\notin A\cup B$, אז $x\notin A$.
ג. אם $x\notin A$, אז $x\notin A\cap B$.
ד. אם $x\notin A\cap B$, אז $x\notin A$.
ה. אם $x\notin A$, אז $x\notin A-B$.
ו. אם $x\notin A-B$, אז $x\notin A$.
ז. אם $x\in B$, אז $x\notin A-B$.
ח. אם $x\notin A-B$, אז $x\in B$.
ט. $x\notin A-B \Leftrightarrow x\notin A$
י. $x\notin A-B \Leftrightarrow x\in B$
יא. השלימו: $x\notin A-B \Leftrightarrow$ ______.
יב. $A\subseteq B\cap C \;\Leftrightarrow\; (A\subseteq B \wedge A\subseteq C)$
יג. $A\subseteq B\cup C \;\Leftrightarrow\; (A\subseteq B \vee A\subseteq C)$
יד. אם $A=A\cup B$, אז $A\subseteq B$.
טו. אם $A=A\cup B$, אז $B\subseteq A$.
טז. אם $A=A\cap B$, אז $A\subseteq B$.
יז. אם $A=A\cap B$, אז $B\subseteq A$.
יח. אם $A\subseteq B$, אז $A=A\cup B$.
יט. אם $B\subseteq A$, אז $A=A\cup B$.
כ. אם $A\subseteq B$, אז $A=A\cap B$.
כא. אם $B\subseteq A$, אז $A=A\cap B$.

2) תהיינה A,B,C קבוצות.
הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:
א. אם $A=A-B$, אז $B=\varnothing$.
ב. אם $A=A-B$, אז $A\cap B=\varnothing$.
ג. אם $A=A\cup B$, אז $A\cap B=B$.
ד. אם $B=A\cup B$, אז $A\cap B=B$.
ה. אם $A\cap B=A$, אז $A=A\cup B$.
ו. אם $A\cap B=B$, אז $A=A\cup B$.
ז. אם $A\cup B=A\cup C$ וגם $A\cap B=A\cap C$ אז $B=C$.
ח. $A\cup(B-C)=(A\cup B)-C$
ט. $A\cup(B-C)=(A\cup B)-(A\cup C)$
י. $(A\cup B)\cap C=A\cup(B\cap C)$
יא. $(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\cup C)$
יב. $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$
יג. $(A-B)\cap(C-D)=(A\cap C)-(B\cup D)$
יד. להלן שתי טענות. הוכיחו את הנכונה והפריכו את השגויה:
1. $A\cap B\cap C\subseteq A\oplus B\oplus C$
2. $A\oplus B\oplus C\subseteq A\cap B\cap C$

תשובות סופיות

1) א. לא נכונה. ב. נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. נכונה.
ו. לא נכונה. ז. נכונה. ח. לא נכונה. ט. לא נכונה. י. לא נכונה.
יא. $x\in B \; V \; x\notin A$ יב. נכונה. יג. לא נכונה. יד. לא נכונה.
טו. נכונה. טז. נכונה. יז. לא נכונה. יח. לא נכונה. יט. נכונה.
כ. נכונה. כא. לא נכונה.

2) א. לא נכונה. ב. לא נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. לא נכונה.
ו. נכונה. ז. נכונה. ח. לא נכונה. ט. לא נכונה. י. לא נכונה.
יא. נכונה. יב. נכונה. יג. נכונה. יד.1. נכונה. 2. לא נכונה.

דרך השלילה

שאלות

הוכיחו כל אחת מהטענות הבאות בדרך השלילה. במקום הטענה אם α, אז β, נוכיח אם $\neg\beta$, אז $\neg\alpha$.

יש לזכור תמיד שלהנחת השלילה $\neg\beta$ ולכל הנובע ממנה מתייחסים כנתון.

1) אם $A-(B-C)\subseteq(A-B)-C$, אז $A\cap C=\varnothing$
2) אם $(A-C)\cup(C-B)\subseteq A\cap B$, אז $A\subseteq B$.
3) אם $(A\cup B)-C\subseteq A-B$, אז $(A-C)\cap B=\varnothing$.
4) אם $(C-A)\cup(B-C)\subseteq A-B$, אז $B\subseteq A$.
5) אם $A\subseteq A\Delta B$ וגם $B-C=B\Delta C$, אז $A\cap C=\varnothing$.
6) אם $A\subseteq A\oplus B$ וגם $B-C=B\oplus C$, אז $A\cap C=\varnothing$.

תשובות סופיות

1) הוכחה.
2) הוכחה.
3) הוכחה.
4) הוכחה.
5) הוכחה.
6) הוכחה.

קבוצת חזקה

שאלות

1) עבור $A=\{3,\{\varnothing\}\}$, $B=\{\{3\},\{4,\varnothing\}\}$, $C=\{3,\{3\},\{\varnothing,3\}\}$
רשמו את הקבוצות הבאות:
א. את $P(C)$, $P(B)$ ואת $P(A)$.
ב. $P(A)\cap B$, $P(A)\cap A$, $P(C)\cap C$ ואת $C-P(C)$.

2) עבור הקבוצות $B=\{1,\varnothing\}$, $A=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$,
א. רשמו את $P(A)$ ואת $P(B)$.
ב. רשמו את $P(A)-P(B)$ ואת $P(B)-P(A)$.
ג. $P(A)-A$ ואת $P(A)-\{A\}$.

3) רשמו את $P(\varnothing)$, את $P(P(\varnothing))$ ואת $P(P(P(\varnothing)))$.

4) תהיינה A,B שתי קבוצות. הוכיחו או הפריכו:
א. $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$
ב. $P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$
ג. $P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$
ד. $P(A)\cap A\neq\varnothing$
ה. $P(A)\cap A=\varnothing$
ו. תנו דוגמה לקבוצה A שמקיימת $A\cap P(A)\cap P(P(A))\neq\varnothing$.
ז. אם $\{A\}\subseteq P(B)$, אז $P(A)\subseteq P(B)$.

את שתי הטענות הבאות הוכיחו בדרך השלילה:
ח. אם $P(A)\subseteq P(A-B)$, אז $A\cap B=\varnothing$.
ט. אם $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$, אז $(A\subseteq B)\vee(B\subseteq A)$ (שאלה קשה).

5) תהיינה A,B,C קבוצות כלשהן, ונתון $P(B)-P(A)=P(B)-\{\varnothing\}$.
הוכיחו כי $B-A=B$.

תשובות סופיות

1) א. $P(A)=\{\varnothing,\{3\},\{\{\varnothing\}\},\{3,\{\varnothing\}\}\}$, $P(B)=\{\varnothing,\{\{3\}\},\{\{4,\varnothing\}\},\{\{3\},\{4,\varnothing\}\}\}$,
$P(C)=\{\varnothing,\{3\},\{\{3\}\},\{\{\varnothing,3\}\},\{3,\{3\}\},\{3,\{\varnothing,3\}\},\{\{3\},\{\varnothing,3\}\},\{3,\{3\},\{\varnothing,3\}\}\}$.

ב. $P(A)\cap B=\{\{3\}\}$, $P(A)\cap A=\varnothing$, $P(C)\cap C=\{\{3\}\}$, $C-P(C)=\{3,\{\varnothing,3\}\}$.

2) א. $P(A)=\{\varnothing,\{\varnothing\}\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$, $P(B)=\{\varnothing,\{1\},\{\varnothing\},\{1,\varnothing\}\}$.

ב. $P(A)-P(B)=\{\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$, $P(B)-P(A)=\{\{1\},\{1,\varnothing\}\}$.

ג. $P(A)-A=\{\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$, $P(A)-\{A\}=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}$.

3) $P(\varnothing)=\{\varnothing\}$, $P(P(\varnothing))=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$, $P(P(P(\varnothing)))=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$.

4) א. לא נכונה. ב. נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. לא נכונה.
ו. ראו סרטון. ז. נכונה. ח. הוכחה. ט. הוכחה.

5) הוכחה.

מכפלה קרטזית

שאלות

1) תהיינה A,B,C קבוצות. הוכיחו:

א. $(A=B)\Leftrightarrow(A\times A=B\times B)$

ב. $((B=\varnothing)\vee(A=\varnothing)\vee(A=B))\Leftrightarrow(A\times B=B\times A)$

ג. הוכיחו כי לכל ארבע קבוצות A,B,C,D מתקיים
$(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$

ד. אם $((A\times A)\cup(B\times B)=(C\times C))$, אז
$(((B\subseteq A)\vee(A\subseteq B))\wedge(A\cup B\subseteq C))$.

ה. הוכיחו כי לכל ארבע קבוצות A,B,C,D מתקיים
$(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$

2) הוכיחו או הפריכו:
תהיינה A,B שתי קבוצות כלשהן ותהי $S\subseteq A\times B$.
אז קיימות $C\subseteq A$ ו-$D\subseteq B$, כך ש-$S=C\times D$.

3) הוכיחו או הפריכו:
קיימות שתי קבוצות A,B, כך ש-$|A\times B|=24$ וגם $|A\cap B|=5$ (סימון $|\ |$ על קבוצה מסמן את מספר אבריה).

4) הוכיחו או הפריכו:
לכל שלוש קבוצות A,B,C מתקיים $A\times(B\oplus C)=(A\times B)\oplus(A\times C)$.

5) הדגימו שלוש קבוצות A,B,C, כך ש-$(A\times(B\times C))\cap((A\times B)\times C)\neq\varnothing$.

תשובות סופיות

1) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הוכחה. ה. הוכחה.
2) לא נכונה.
3) לא נכונה.
4) נכונה.
5) ראו סרטון.

מתמטיקה בדידה (5112)

פרק 4 - יחסים

תוכן העניינים

לנושא זה לא קיים ספר פרק